

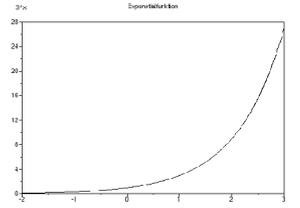
## Mathematischer Exkurs

Wie finde ich einen mathematischen Zusammenhang zwischen Messwerten?

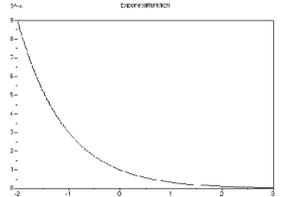
# Linearisierung

### Exponentialfunktion und Logarithmus

$y = a^x$  heißt Exponentialfunktion zur Basis  $a$  ; Bsp.:



$y = a^{-x}$  ist eine fallende Exp.-Fkt. ; Bsp.:



Wie lässt sich eine solche Gleichung nach  $x$  auflösen? Umkehrfunktion „**Logarithmus**“:

$$\log_a y = \log_a a^x = x, \quad \text{Bsp.: } y = 1000, a = 10 \Rightarrow \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Regeln für das Rechnen mit Logarithmen:

- $\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$  ,  $(\log_{10} \frac{100000}{1000} = \log_{10} 100 = 2 = \log_{10} 100000 - \log_{10} 1000 = 5 - 3)$
- $\log_a c \cdot d = \log_a c + \log_a d$  ,  $(\log_{10} 100000 \cdot 1000 = \log_{10} 10^8 = 8 = \log_{10} 100000 + \log_{10} 1000 = 5 + 3)$
- $\log_a c^d = d \cdot \log_a c$  ,  $(\log_{10} 1000^2 = \log_{10} 1000000 = 6 = 2 \cdot \log_{10} 1000 = 2 \cdot 3)$

Die besondere Exponentialfunktion:

Es existiert eine Basis, die sich vor allen anderen Basen auszeichnet:  $e = 2,7182818\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Für eine Exponentialfunktion zu dieser Basis ist die Ableitung wieder die Funktion selbst (oder proportional dazu):

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x \text{ usw.}; \quad y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x} \quad (\text{Kettenregel})$$

In der Physik wird meistens diese „schöne“ Exponentialfunktion verwendet, die Umkehrfunktion wird  $\ln$  abgekürzt („*logarithmus naturalis*“).

Und wenn ich die Basis 2,7182818... nicht mag?

Basenumrechnung von Exponentialfunktionen:

Jede Exponentialfunktion lässt sich in eine Exponentialfunktion zu beliebiger Basis umrechnen.

Bsp.:  $a^x = e^{x \cdot \ln a}$  (oder  $= b^{x \cdot \log_b a}$ ) (In PASCAL kann man z.B. kein  $a^x$  rechnen, stattdessen muss man  $\exp(x \cdot \ln(a))$  eingeben)

Potenzfunktionen:

$$y = x^2, \quad y = 3 \cdot x^7, \quad y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \text{ heißen Potenzfunktionen.}$$

**Nahezu alle physikalischen Gesetze sind Exponential- bzw. Potenzfunktionen!**

Wie lässt sich aus den Messwerten ermitteln, welche Funktion „dahintersteckt“?

$$y = C_1 \cdot e^{C_2 x} \Rightarrow \ln(y) \text{ gegen } x \text{ aufgetragen ergibt eine Gerade mit Steigung } C_2 \text{ und Achsenabschnitt } \ln(C_1)$$

$$y = C_1 \cdot x^{C_2} \Rightarrow \ln(y) \text{ gegen } \ln(x) \text{ aufgetragen ergibt eine Gerade mit Steigung } C_2 \text{ und Achsenabschnitt } \ln(C_1)$$