

Einführung in die numerische Integration

... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“

Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t=0$ losgelassen.
Wann ist der Körper wo? Welche Strecke hat er
zu verschiedenen Zeiten zurück gelegt?

Die Antwort gibt ein t-s-Diagramm.

Was wissen wir?

Einführung in die numerische Integration

... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“

Was wissen wir?

Die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte bewirkt eine Beschleunigung:

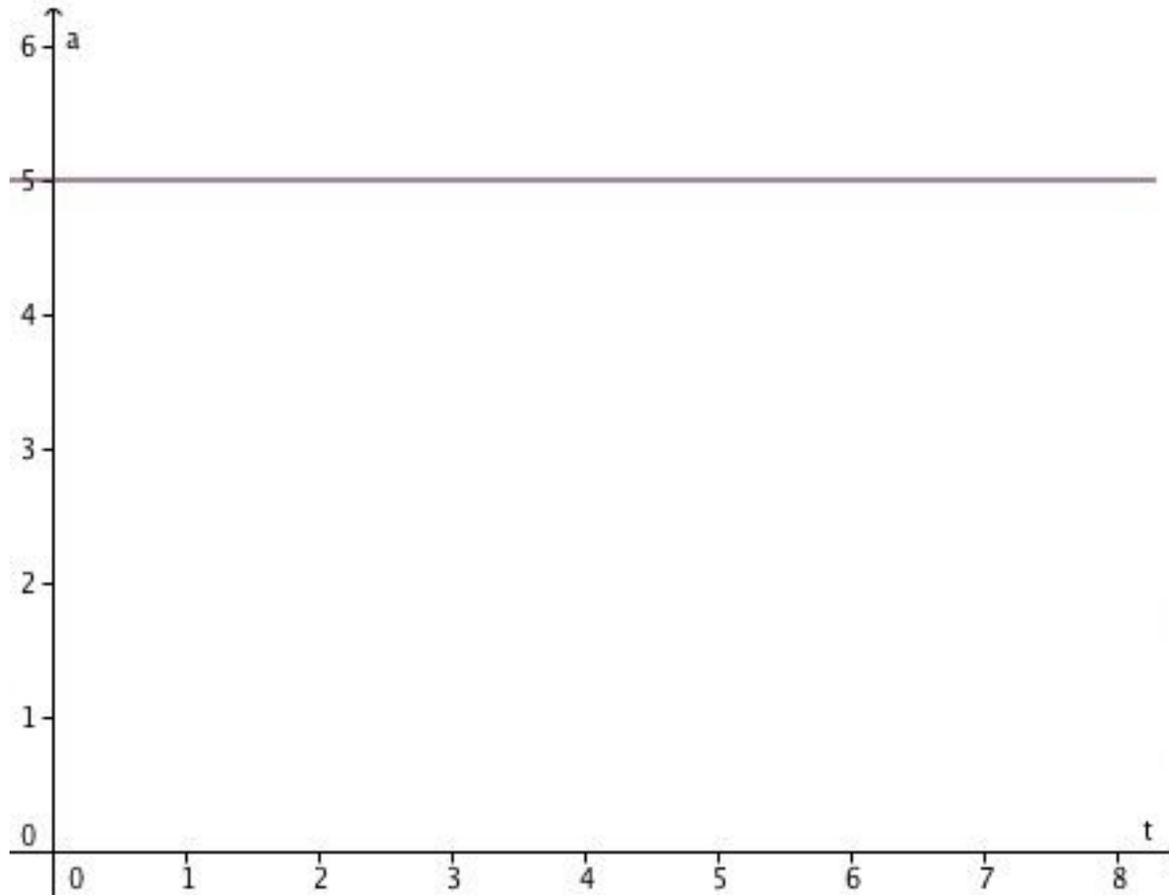
$$F = ma \quad 2. \text{ Newtonsches Axiom}$$

In diesem Fall wirkt nur die Schwerkraft:

$$F = mg \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Einführung in die numerische Integration

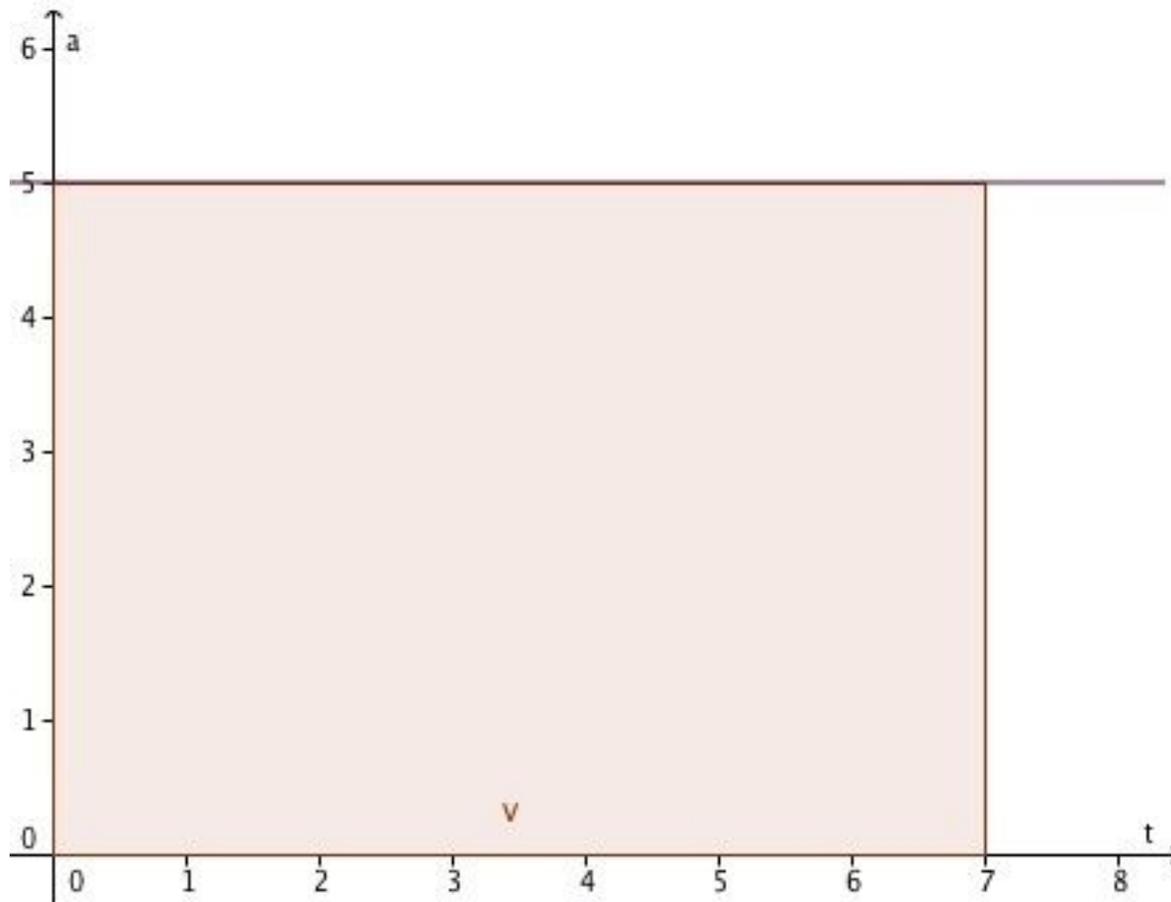
... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“



$$a = \textit{konst.}$$

Einführung in die numerische Integration

... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“



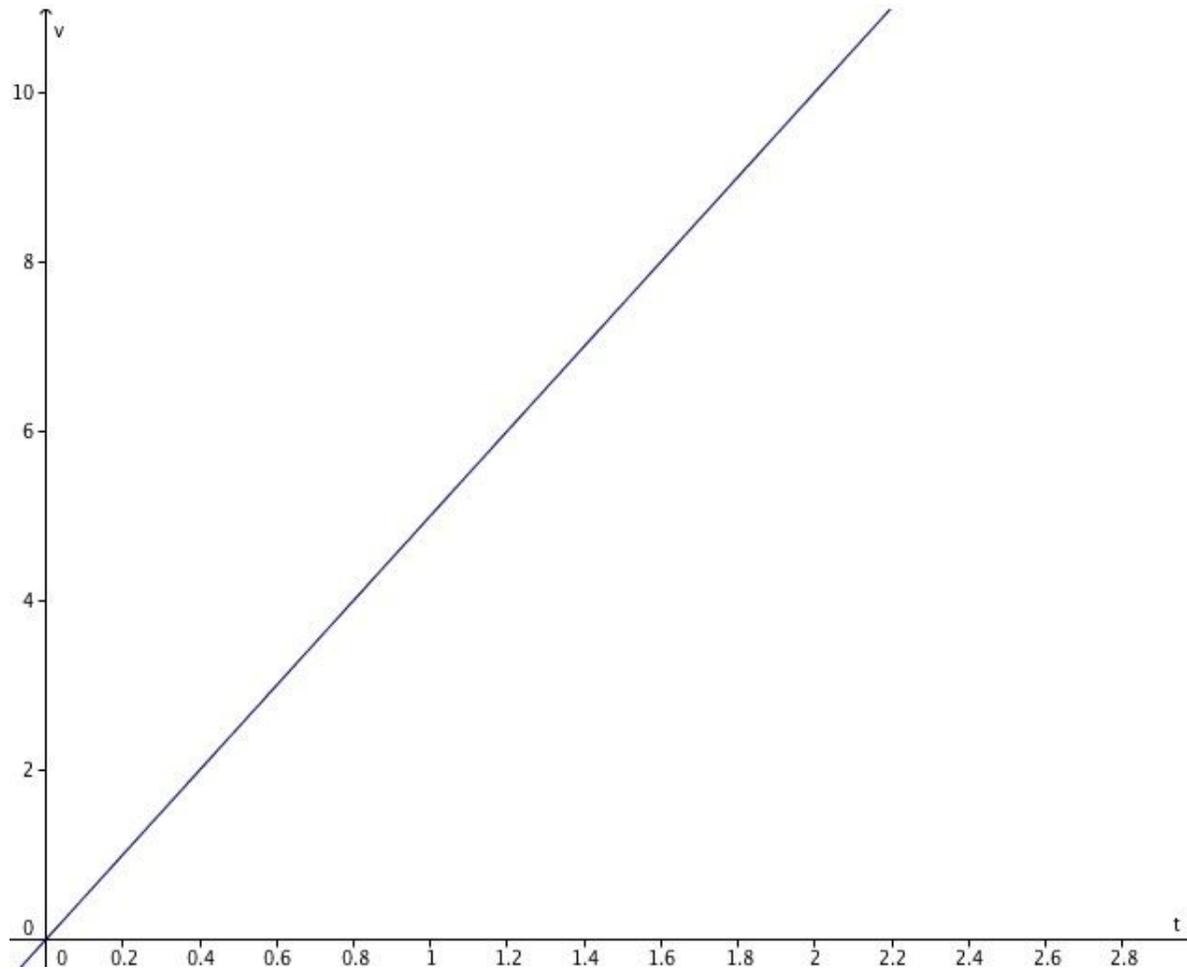
$a = \text{konst.}$

*In diesem Fall ist v
die Fläche unter dem
Graphen :*

$$v = a \cdot t$$

Einführung in die numerische Integration

... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“

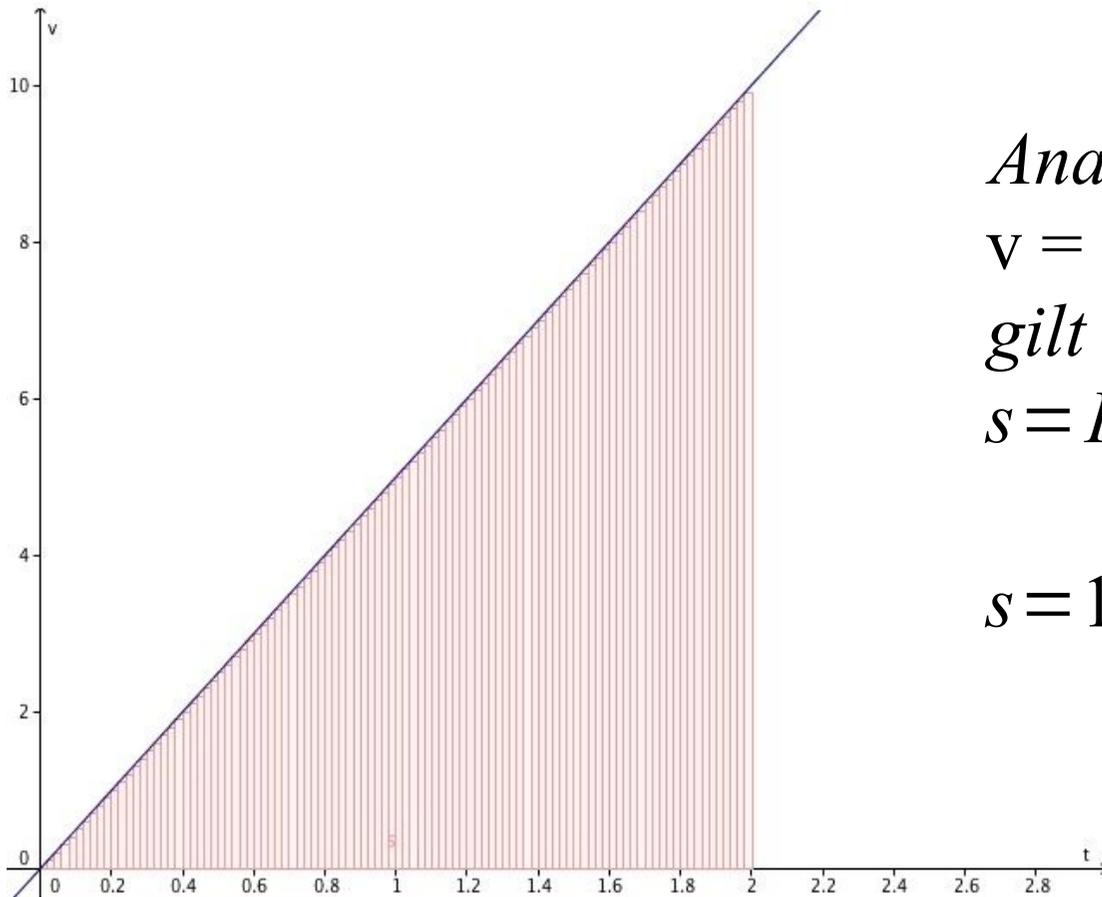


Und es gilt:

$$v = a \cdot t$$

Einführung in die numerische Integration

... am Beispiel „Freier Fall eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde“



Analog zu

$v =$ Fläche unter dem a -Graphen

gilt :

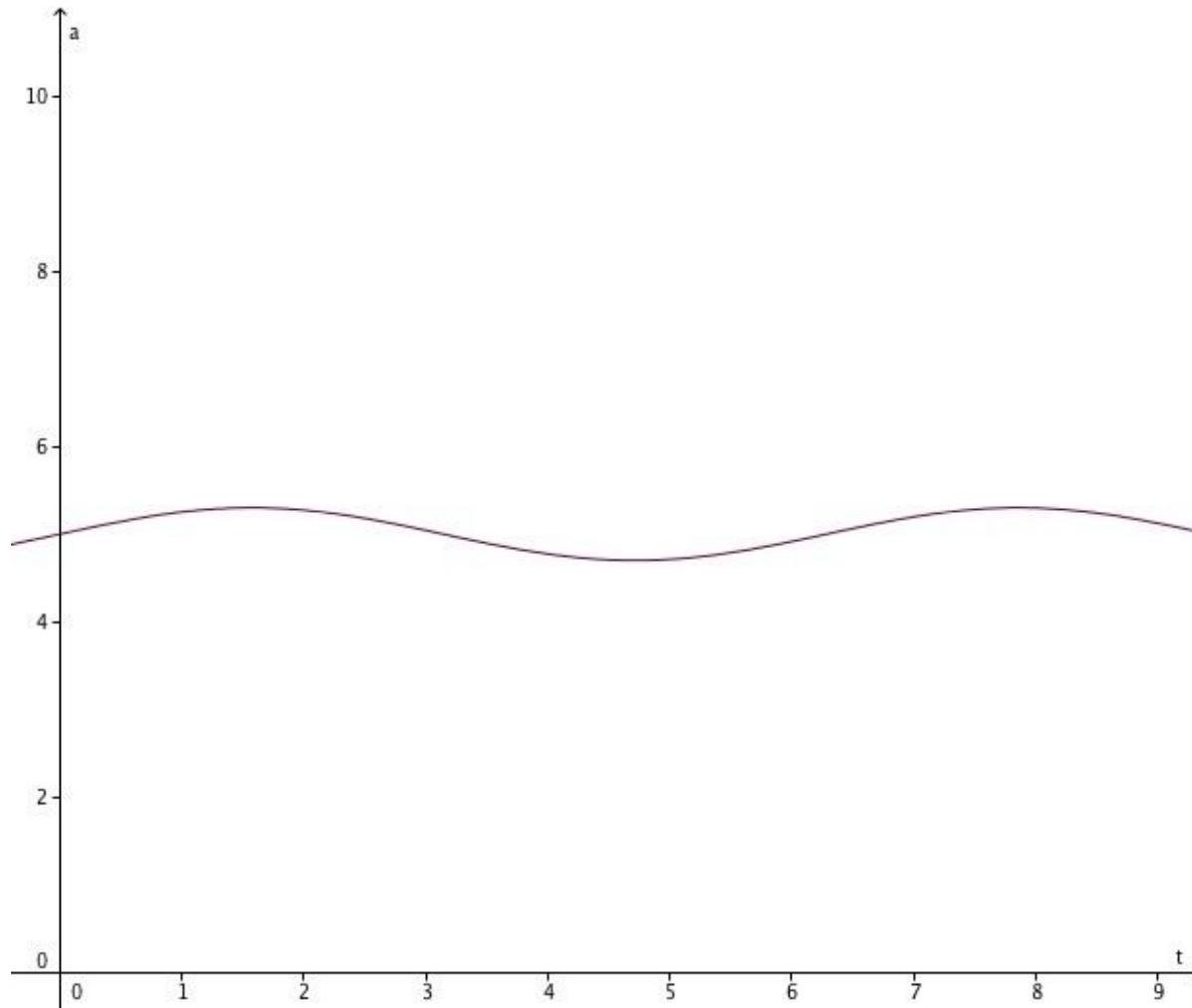
$s =$ Fläche unter dem v -Graphen

$$s = 1/2 \cdot v(t) \cdot t = 1/2 \cdot a \cdot t^2$$

Der Fall „a ist nicht konstant“

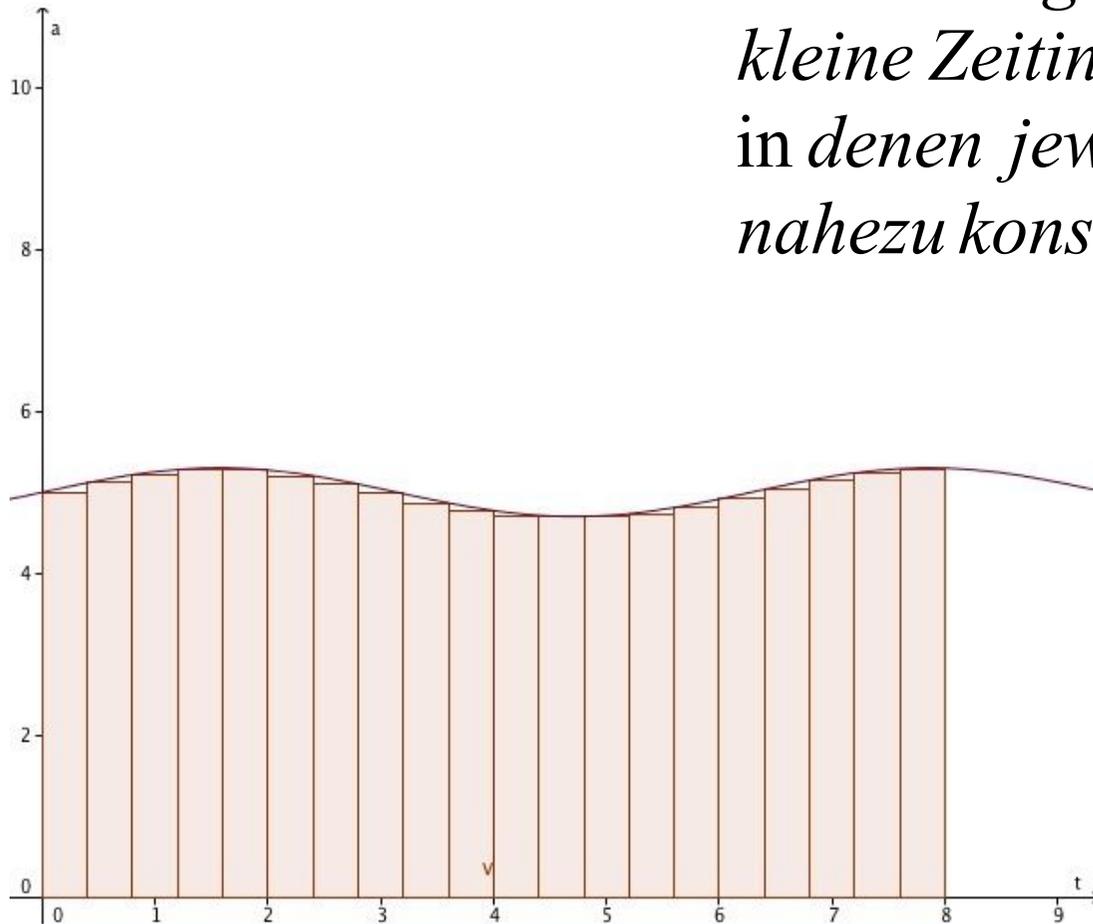
Ist a zeitlich variabel, wird die Flächenbestimmung schwieriger.

Der Fall „a ist nicht konstant“



Der Fall „a ist nicht konstant“

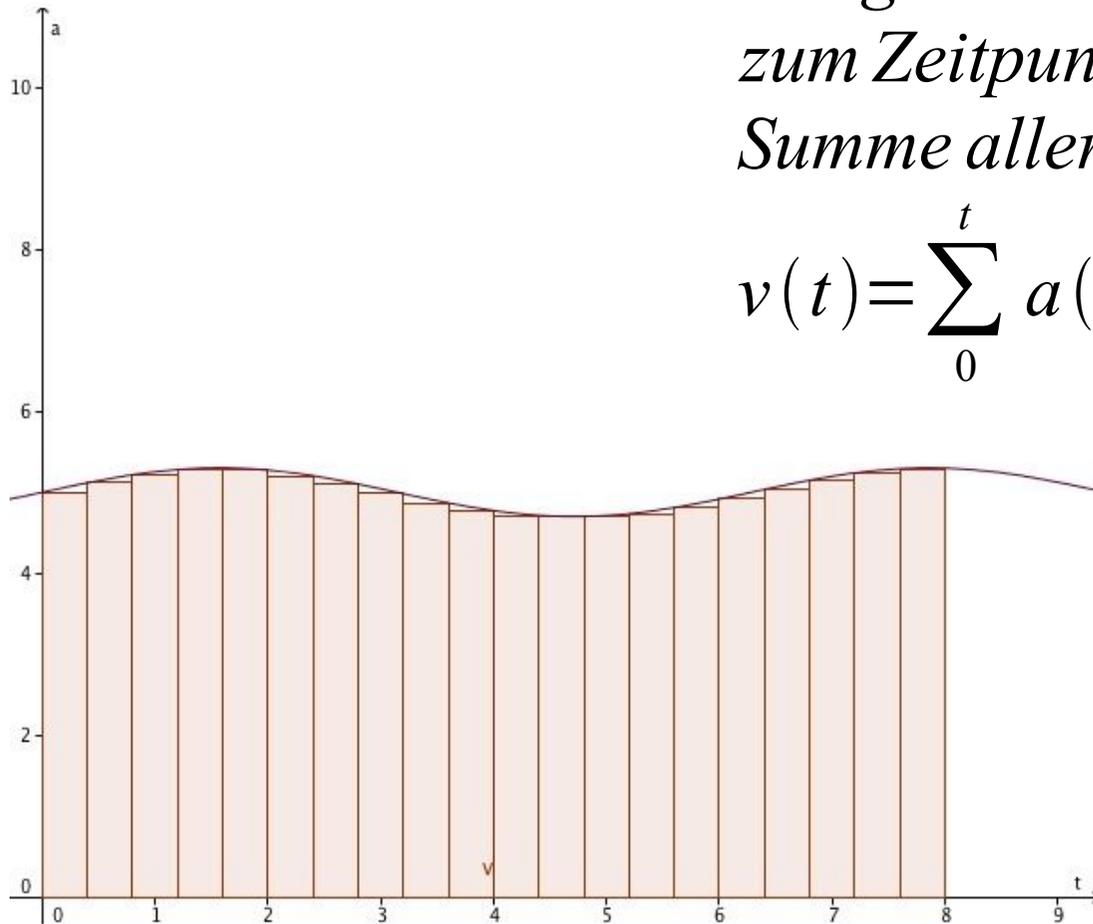
*Die Lösung besteht darin ,
kleine Zeitintervalle dt zu betrachten ,
in denen jeweils die Beschleunigung als
nahezu konstant betrachtet werden kann.*



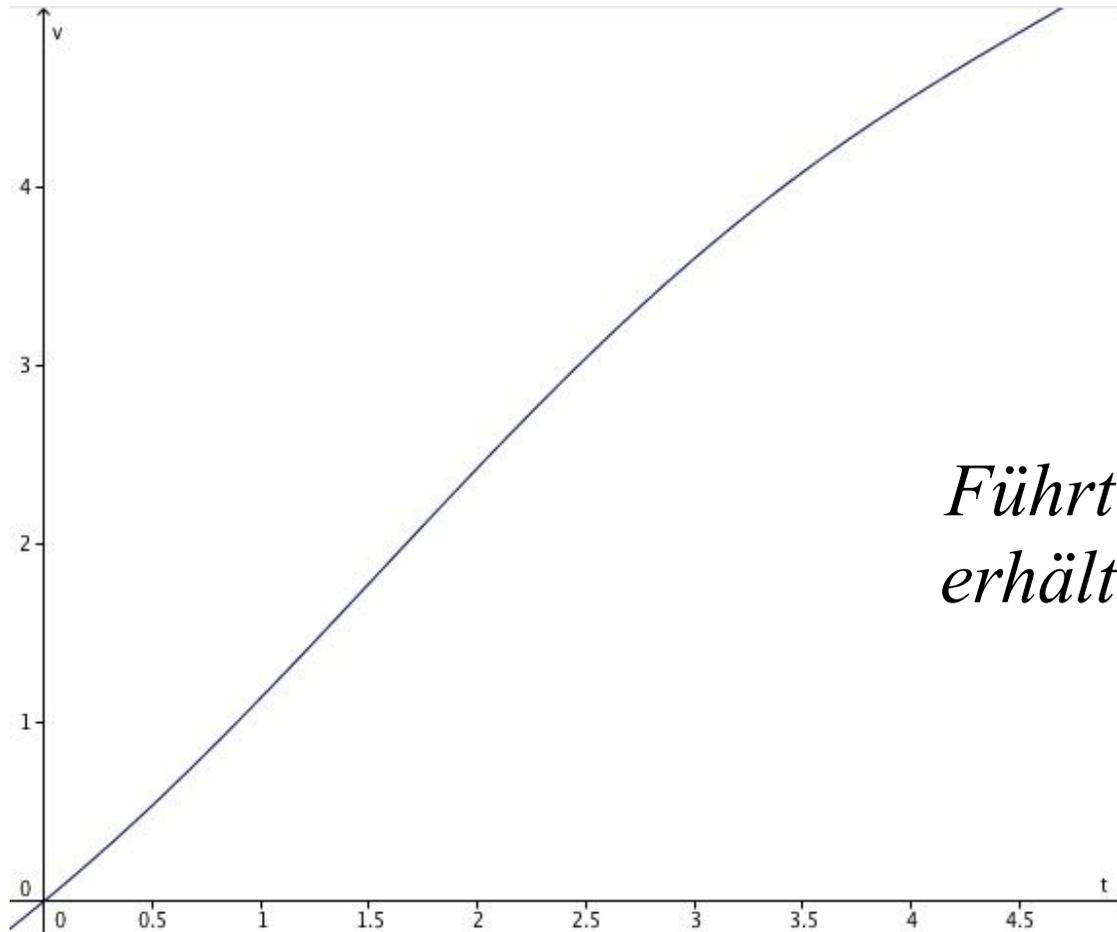
Der Fall „a ist nicht konstant“

*Die gesuchte Geschwindigkeit
zum Zeitpunkt t ergibt sich dann als
Summe aller Rechteckflächen:*

$$v(t) = \sum_0^t a(t) \cdot dt$$

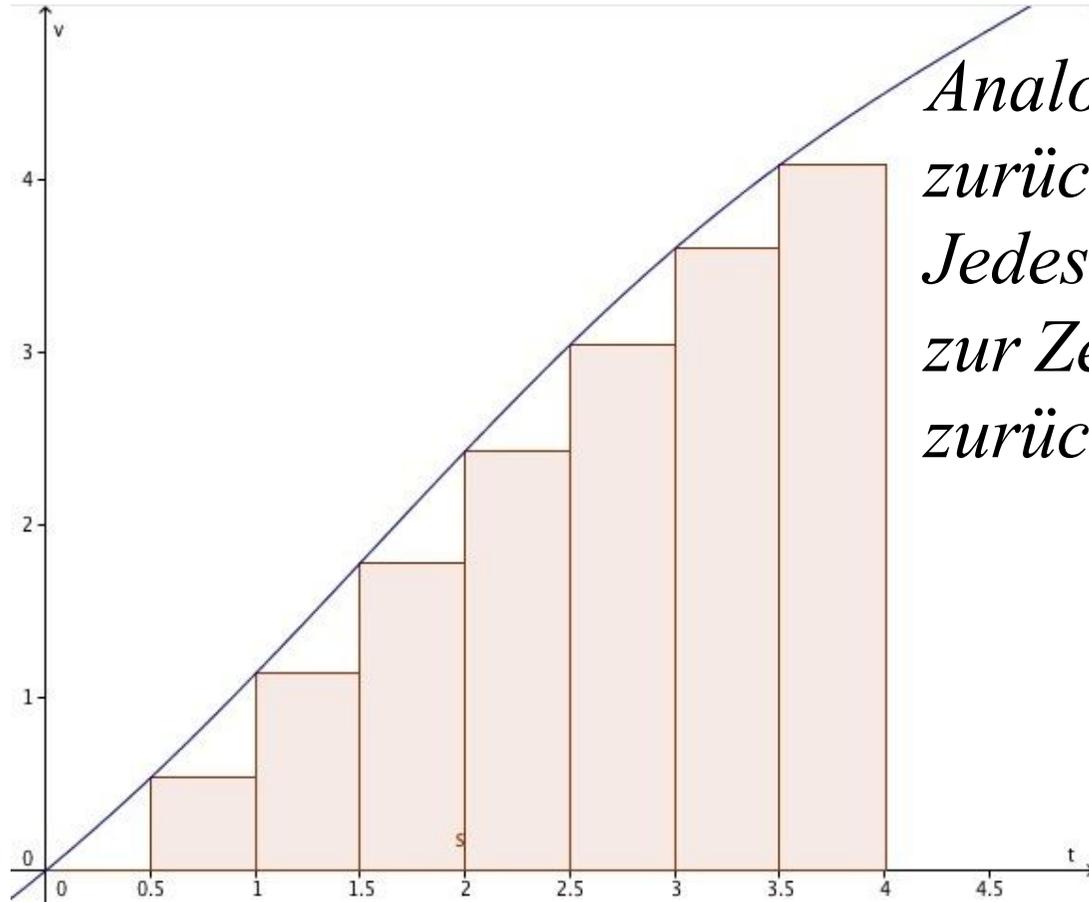


Der Fall „a ist nicht konstant“



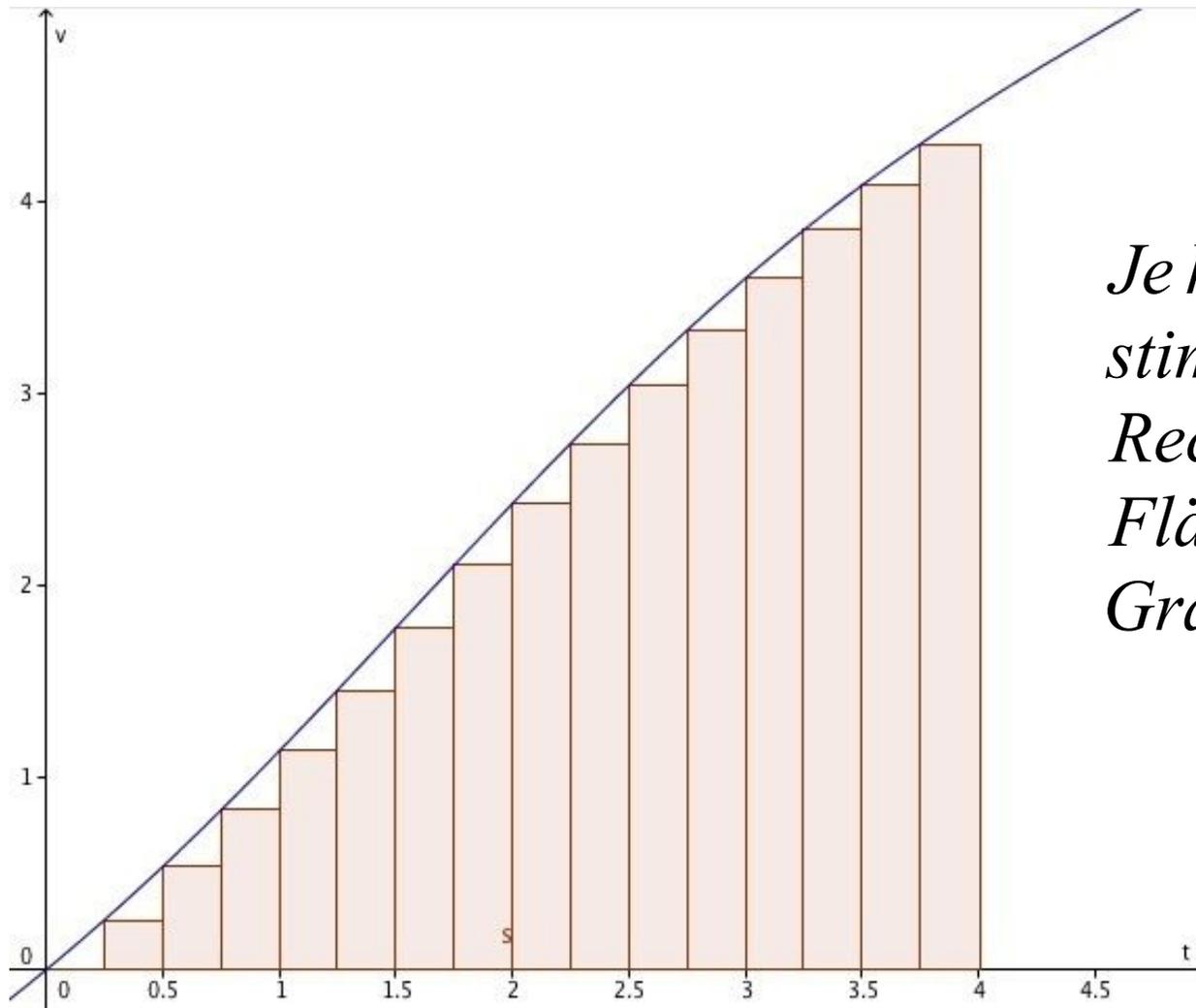
*Führt man das für alle t aus ,
erhält man das $t - v -$ Diagramm.*

Der Fall „a ist nicht konstant“



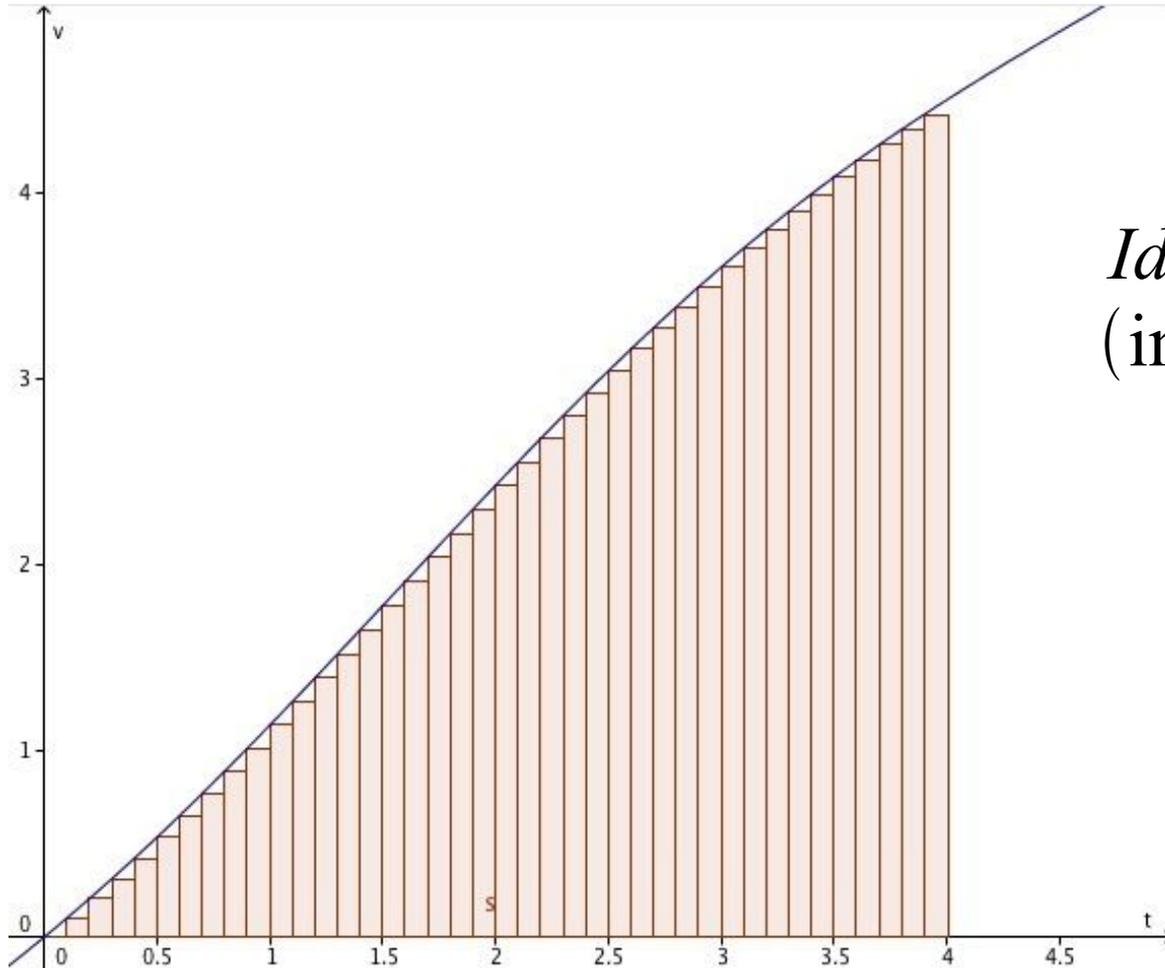
Analog verfährt man, um den zurückgelegten Weg zu ermitteln. Jedes Rechteck repräsentiert das zur Zeit t im Zeitintervall dt zurückgelegte Teilstück $ds = v(t) \cdot dt$.

Der Fall „a ist nicht konstant“



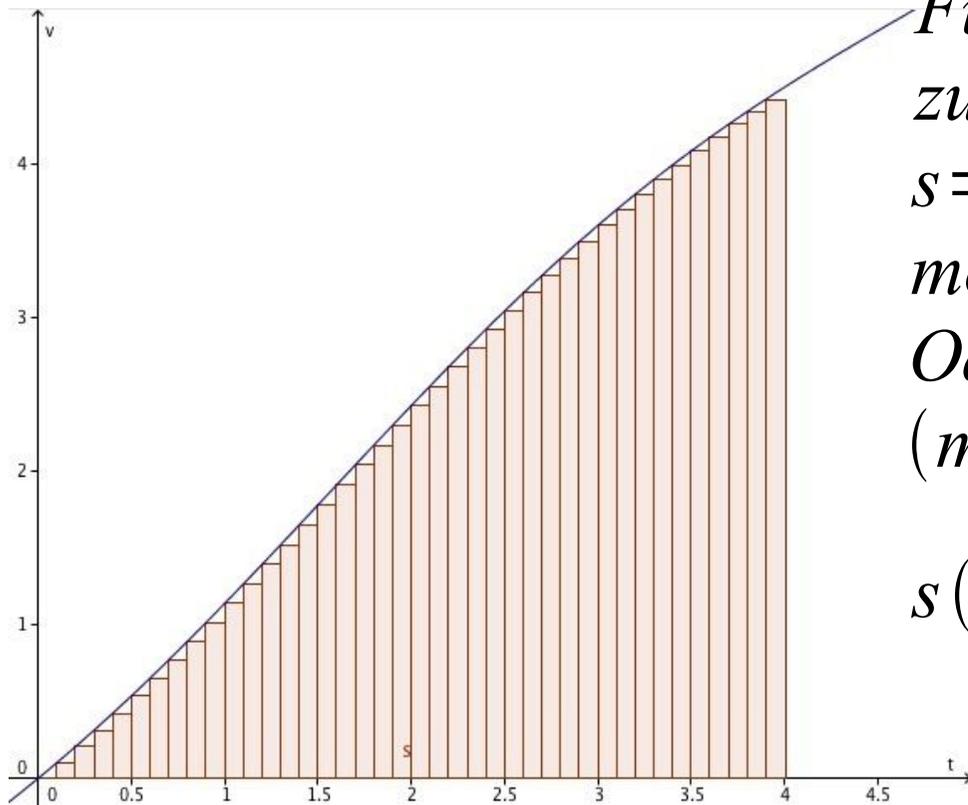
Je kleiner dt , desto genauer stimmt die Summe der Rechtecke mit dem Flächeninhalt unter dem Graphen überein!

Der Fall „a ist nicht konstant“



*Ideal wäre ein unendlich
(infinitesimal) kleines dt !*

Der Fall „a ist nicht konstant“



Für den insgesamt zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg gilt also: $s =$ Summe aller ds , wobei dt möglichst klein zu wählen ist. Oder anders ausgedrückt (mit $ds = v(t) \cdot dt$):

$$s(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \sum_0^t v(t) dt$$

$$= \int_0^t v(t) dt$$

•(diesen Ausdruck nennt man auch das Integral von v)

„Und wie sage ich es dem Computer?“

Diese Flächenberechnungen („*Integration*“) soll jetzt der Computer übernehmen.

„Und wie sage ich es dem Computer?“

Wir müssen ihm folgendes beibringen :

(1)Beginne bei $t=0$

(2)Berechne a

(3)Berechne dv nach der Zeit dt mit dem aktuellen Wert für a :

$$dv = a dt$$

(4)Berechne die Gesamtgeschwindigkeit: $v = v_{\text{alt}} + dv$ („ $v = v + dv$ “)

(5)Berechne den in der Zeit dt zurückgelegten Weg: $ds = v dt$

(6)Berechne den insges. zurückgelegten Weg: $s = s_{\text{alt}} + ds$ („ $s = s + ds$ “)

(7)Speichere die Werte t, v und s , bevor sie im nächsten Durchlauf überschrieben werden.

(8)Mach den nächsten Durchlauf: **Gehe zu (2)**

(9)Wiederhole das Ganze bis eine bestimmte Bedingung erfüllt ist:

Abbruchbedingung

(10)Zeichne das t - v - und das t - s -Diagramm

Und so sieht das in scilab aus:

```
//Dies ist ein Kommentar

//Simulation des freien Falls ohne Luftreibung

g=9.81;           //Variablen, Startwerte und Konstanten deklarieren
m=100;
v=0;
s=0;
dt=0.01;

S=[];V=[];T=[];  //Speicherplatz reservieren für Variablen; Achtung: Grossbuchst.!
for t=0:dt:20,   //von 0 bis 20 in dt-Schritten immer neu t, v, s berechnen

    a=g;         //denn a = F/m = (mg)/m = g
    v=v+a*dt;    //d.h. v = v_alt + dv
    s=s+v*dt;    //d.h. s = s_alt + ds

    V=[V,v];     //die aktuellen t-, s- und v-Werte werden gespeichert,
    S=[S,s];     //bevor sie im naechsten Durchlauf ueberschrieben werden
    T=[T,t];
end;

//der Rest ist graphische Ausgabe
clf xbase(); //leeres Ausgabenfenster erstellen
subplot(2,2,1) //beide Diagramme in ein Fenster, das erste oben links
xgrid();xtitle('t-s-Diagramm', 't/s','s/m'); //mit Gitter und Beschriftungen
plot2d(T,S ,style=1);
subplot(2,2,4) //das zweite unten rechts
xgrid();xtitle('t-v-Diagramm', 't/s','v in m/s');
plot2d(T,V ,style=2);
```

Modellbildung

Zugegebenermaßen ist die bisherige Simulation nicht sonderlich realistisch: die Beschleunigung ist nicht konstant, mit zunehmender Geschwindigkeit wird der Körper immer stärker durch die Luftreibungskraft gebremst.

„Also war die ganze Arbeit für die Katz'?!“

Nein!!! Im Gegenteil!

Modellbildung

Hat man einmal - z.B. durch Experimente im Windkanal – herausgefunden, von welchen Faktoren diese Luftreibungskraft F_{LR} abhängt, genügt es **eine einzige Zeile** im Programm zu ändern:

die Berechnungsvorschrift für die **Beschleunigung a** wird einfach angepasst an die neuen Erkenntnisse!

Modellbildung

Nach Newton gilt:

die Summe aller Kräfte auf eine Masse m bewirkt eine Beschleunigung a :

$$F = m \cdot a$$

Die Gesamtkraft ist nun: $F = F_G - F_{LR}$

(„-“, weil F_{LR} der Gravitationskraft entgegenwirkt)

Daraus ergibt sich für die Beschleunigung:

$$a = F / m = \frac{m \cdot g - F_{LR}}{m} = g - F_{LR} / m$$

Modellbildung: einige theoretische Bemerkungen

Von einer *Modellbildung* spricht man in der Physik, wenn man durch Anwendung elementarer physikalischer Gesetze und Variation der Ansätze für komplexe physikalische Situationen Modelle entwirft, die das reale Verhalten eines Systems unter Berücksichtigung von Störeinflüssen beschreiben und diese Ansätze in Hinblick auf eine bestmögliche Beschreibung der Realität durch Einbeziehung einer zunehmenden Zahl von Störeinflüssen optimiert. Im Allgemeinen werden solche Modellbildungen über viele Jahre kontinuierlich optimiert, indem Erfahrungen mit den Ergebnissen im Vergleich zur Realität in das Modell integriert werden.

Wegen der Komplexität solcher Modelle werden Modellbildungsprozesse heute auf Rechnern (Workstations/PCs oder Großrechnern) durchgeführt, da die Rechenarbeit bei numerischen - also durch Näherungsverfahren berechnete - Lösungen erheblich ist.

